Equations différentielles 2

Exercice [Equations d'Euler et exponentielles]

Pour $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, considérons l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{-1+\alpha+\beta}{z-1}\frac{dy}{dz} - \frac{\alpha\beta}{(z-1)^2}y$$

Remarque 1. *On reconnaitra une équation d'Euler en la variable $z-1$. Résolvez la! L'énoncé de l'exercice fait "semblant" de ne pas la reconnaitre avant le question 4.*

1. Donnez les singularités, leurs types et les exposants de l'équation. Dans $\mathbf{C}$, l'équation a une singularité en 1. Le coefficient de dy/dz ayant un pôle d'ordre 1 et celui de y ayant un pôle d'ordre 2, cette singularité est régulière.

   Léquation indiciel en $z=1$ est $x(x-1) = (\alpha+\beta-1)x - \alpha\beta$ c'est-à-dire $(x-\alpha)(x-\beta)$. Les deux exposant sont α et β

   Regardons le point à l'infini en posant $w = \frac{1}{z}$:

$$(w^4\frac{d^2}{dw^2} + 2w^3\frac{d}{dw})y = \frac{-1+\alpha+\beta}{1/w-1}(-w^2\frac{d}{dw})y - \frac{\alpha\beta}{(1/w-1)^2}y$$

   Ce qui donne $\frac{d^2y}{dw^2} = (\frac{-2}{w} - \frac{1}{w}\frac{-1+\alpha+\beta}{1-w})\frac{dy}{dw} - \frac{1}{w^2}\frac{\alpha\beta}{(1-w)^2}y$ On reconnait une singularité régulière en $w=0$ ($z=\infty$). Léquation indicielle en $w=0$ est $x(x-1) = (-\alpha-\beta-1)x - \alpha\beta$ c'est-à-dire $(x+\alpha)(x+\beta)$. Les deux exposants sont $-\alpha$ et $-\beta$.

2. Pour $s \in \mathbf{C}^*$, on note $E_{s,\alpha,\beta}$ l'équation dans la variable $w = sz$. Vérifiez que $E_{s,\lambda s,\mu s}$ tends vers une équation à coefficients rationnels lorsque s tend vers ∞. On dit qu'on fait confluer les singularités en $z=1$ (ou $w=s$) et en $z=\infty$ (ou $w=\infty$). L'équation dans la nouvelle coordonnée est $s^2\frac{d^2y}{dw^2} = \frac{-1+s\lambda+s\mu}{w/s-1}s\frac{dy}{dw} - \frac{s^2\lambda\mu}{(w/s-1)^2}y$ qui se réécrit

$$\frac{d^2y}{dw^2} = \frac{-1+s(\lambda+\mu)}{w-s}\frac{dy}{dw} - \frac{s^2\lambda\mu}{(w-s)^2}y$$

   Lorsque $s \to \infty$, l'équation limite est

$$\frac{d^2y}{dw^2} = (\lambda+\mu)\frac{dy}{dw} - \lambda\mu y$$

3. Donner les types de singularités de l'équation limite.

   Cette équation a une unique singularité en ∞, on vérifie qu'elle est irrégulière

4. Etudier le comportement des solutions de $E_{s,\lambda s,\mu s}$ lorsque s tend vers ∞.

   Une base de solution de l'équation est donnée par $(w-s)^{s\lambda}$ et $(w-s)^{s\mu}$. Cette base n'a pas de limite lorsque $s \to \infty$ mais on remarque qu'une autre base donnée par $(1-w/s)^{s\lambda}$ et $(1-w/s)^{s\mu}$ tend vers $e^{-\lambda w}$ et $e^{-\mu w}$ qui forme une base de soution de l'équation limite.

   Remarque 2. *Ceci donne une manière détudier les singularités irrégulières appelée confluence des singularités : une singularité irrégulière est en fait plusiseurs singularités régulières infiniment proches les unes des autres. On peux penser que la monodromie de l'équation régulière donne des information sur l'équation limite irrègulière (qui peux ne pas avoir de monodromie). Ce sont des travaux difficile commencer par V.I. Arnol'd, on pourra regarder (plus tard) les travaux d'Alexey Glusyuk (http ://perso.ens-lyon.fr/aglutsyu/)*

Exercice [Equation confluente de Kummer]

On note $(\alpha;n)=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1)$. Considérons la sé rie de Kummer

$$F(\alpha,\gamma;z)=\sum\frac{(\alpha;n)}{(\gamma;n)}\frac{z^n}{n!}\qquad \alpha,\gamma\in\mathbf{C},\gamma\notin\mathbf{Z}$$

1. Montrer que la série converge sur $\mathbf{C}$

   Si $\alpha\in-\mathbf{N}$, la série est un polynôme.

   Si $\alpha\notin-\mathbf{N}$ alors les coefficients de la série ne s'annulent pas et nous pouvons comparer cette série a une série geometrique :

   $$\frac{(\alpha;n+1)}{(\gamma;n+1)}\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\frac{(\gamma;n)}{(\alpha;n)}\frac{n!}{z^n}=\frac{\alpha+n}{\gamma+n}\frac{z}{n+1}\underset{n\to\infty}{\to}0$$

   ce qui prouve que le rayon de convergence de cette série est $+\infty$.

2. Vérifier que F est une solution de l'équation de Kummer

   $$z\frac{d^2y}{dz^2}=(z-\gamma)\frac{dy}{dz}+\alpha y$$

   $$\alpha(\sum_{n\geqslant 0}\frac{(\alpha;n)}{(\gamma;n)}\frac{z^n}{n!})=\alpha+\sum_{n\geqslant 1}\frac{(\alpha;n)}{(\gamma;n)}\alpha\frac{z^n}{n!}$$

   $$\gamma\frac{d}{dz}(\sum_{n\geqslant 0}\frac{(\alpha;n)}{(\gamma;n)}\frac{z^n}{n!})=\alpha+\sum_{n\geqslant 1}\frac{(\alpha;n+1)}{(\gamma;n+1)}\gamma\frac{z^n}{n!}$$

   $$z\frac{d}{dz}(\sum_{n\geqslant 0}\frac{(\alpha;n)}{(\gamma;n)}\frac{z^n}{n!})=\sum_{n\geqslant 1}\frac{(\alpha;n)}{(\gamma;n)}\frac{z^n}{(n-1)!}$$

   $$z\frac{d^2}{dz^2}(\sum\frac{(\alpha;n)}{(\gamma;n)}\frac{z^n}{n!})=\sum_{n\geqslant 2}\frac{(\alpha;n)}{(\gamma;n)}\frac{z^{n-1}}{(n-2)!}=\sum_{n\geqslant 1}\frac{(\alpha;n+1)}{(\gamma;n+1)}\frac{z^n}{(n-1)!}$$

   On vérifie que $\frac{(\alpha;n)}{(\gamma;n)}-\frac{(\alpha;n+1)}{(\gamma;n+1)}\frac{\gamma}{n}+\frac{(\alpha;n)}{(\gamma;n)}\frac{\alpha}{n}=\frac{(\alpha;n)}{(\gamma;n)}\left(1-\frac{\alpha+n}{\gamma+n}\frac{\gamma}{n}+\frac{\alpha}{n}\right)=\frac{(\alpha;n)}{(\gamma;n)}\frac{\alpha+n}{\gamma+n}$.

3. Donner les singularités, leurs type et leurs exposants.

   Il y a une singularité en 0, elle est régulière et son équation indicielle est $x(x-1)=-\gamma x$: les deux exposant sont 0 et $1-\gamma$.

   Regardons ∞ :

   $$\frac{1}{w}(w^4\frac{d^2}{dw^2}+2w^3\frac{d}{dw})y=(\frac{1}{w}-\gamma)(-w^2\frac{d}{dw})y+\alpha y$$

   c'est-à dire $\frac{d^2y}{dw^2}=-(\frac{2}{w}+\frac{1-\gamma w}{w^2})\frac{dy}{dw}+\frac{\alpha}{w^3}y$. La singularité en ∞ est irrégulière.

4. Montrer que, $z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,2-\gamma;z)$ est une seconde solution. D'après le théoreme (Fuchs- Frobenius), la différence des exposants nétant aps entière, il existe une solution de la forme $z^{1-\gamma}f(z)$ avec f holomorphe au voisinage de 0 et $f(0)\neq 0$. En faisant le changement d'inconnue, on trouve une équation pour f. En regardant la forme de cette équation on remarque que $F(\alpha-\gamma+1,2-\gamma;z)$ est solution holomoprhe en 0. Or les deux exposants de cette nouvelles équation sont 0 et $\gamma-1$ ainsi si $\gamma\notin\mathbf{Z}$ les seules solutions holomorphes au voisinage de 0 ne s'annullant pas en 0 sont les multiples de $F(\alpha-\gamma+1,2-\gamma;z)$.

5. Faire le changement de variable $w=\beta z$ dans l'équation $HG(\alpha,\beta,\gamma)$ On rappelle que l'équation hypergéométrique est

   $$z(z-1)\frac{d^2y}{dz^2}+((\alpha+\beta+1)z-\gamma)\frac{dy}{dz}+\alpha\beta y$$

   Soit dans la variable w :

   $$w(w-\beta)\frac{d^2y}{dw^2}+((\alpha+\beta+1)w-\gamma w)\frac{dy}{dz}+\alpha\beta y$$

6. Faire tendre β vers l'infini. (Nous avons confluence des deux singularités $w=\beta$ et $w=\infty$). Que remarque-ton ?

   Avant de prendre la limite, divisez tout le monde par w. Nous obtenons l'équation de Kummer.

7. Montrez que la série hypergéométrique de Gauss $F(\alpha,\beta,\gamma;\frac{z}{\beta})$ tend vers $F(\alpha,\gamma;z)$ lorsque $\beta\to\infty$.

   Remarque 3. *…… Ah si nous avions un théorème assurant que lorsqu'une équation conflue vers une autre alors il existe une solution de la premiere qui converge vers une solution de la seconde ... Vous pouvez essayer de montrer un résultat de ce type*

   Ici nous regarderons la convergence coefficient par coefficient. Nous devons regarder la limite lorsque β tend vers ∞ de $\frac{(\beta;n)}{\beta^n}=\sum_0^n\frac{s_n^k}{\beta^k}$ avec s_n^k l'évalution du polynome symétrique élementaire de degré k en $1,2,3,\dots n$ Cette limite est 1.

   Remarque 4. *La série converge certes mais nous pouvons montrer que la famille de fonctions holomorphe définies par la somme de $F(\alpha,\beta,\gamma;\frac{z}{\beta})$ converge uniformement vers la somme de $F(\alpha,\gamma;z)$ sur tout compact. Attention les éléments de la famille ne seront définies sur $D(0,R)$ que lorsque $|\beta|>R$.*

   La preuve de l'affirmation fait dans la remarque ci-dessus est la suivante :

$$\left|F\left(\alpha,\beta,\gamma;\frac{z}{\beta}\right)-F(\alpha,\gamma;z)\right|\leqslant\sum\frac{|(\alpha;n)|}{|(\gamma;n)|}\left|\frac{(\beta;n)}{\beta^n}-1\right|\frac{|z|^n}{n!}=\sum\frac{|(\alpha;n)|}{|(\gamma;n)|}\left(\sum_1^n\frac{s_n^k}{\beta^k}\right)\frac{|z|^n}{n!}$$

   En supposant $|\beta|>R$, nous pouvons majorer ce dernier par

$$\leqslant\frac{1}{|\beta|}\sum\frac{|(\alpha;n)|}{|(\gamma;n)|}\left(\sum_1^n\frac{s_n^k}{R^{k-1}}\right)\frac{|z|^n}{n!}$$

   Cette derniere série converge sur $D(0,R)$ (car $R(F\left(\alpha,R,\gamma;\frac{z}{R}\right)-F(\alpha,\gamma;z))$ converge uniformenent sur $D(0,|\beta|))$ et donc uniformement sur $\bar{D}(0,R/2)$. Sa somme est donc bornée sur $\bar{D}(0,R/2)$ ainsi sur ce même disque

$$\left|F\left(\alpha,\beta,\gamma;\frac{z}{\beta}\right)-F(\alpha,\beta;z)\right|\leqslant\frac{M}{|\beta|}$$

Exercice

Montrer que

$$\frac{d^n}{dz^n}\frac{1}{z^\alpha}=(-1)^n(\alpha;n)\frac{1}{z^{\alpha+n}}$$

et que

$$\frac{d^n}{dz^n}F(\alpha,\beta,\gamma;z)=\frac{(\alpha;n)(\beta;n)}{(\gamma;n)}F(\alpha+n,\beta+n,\gamma+n;z)$$